Munkácsys Tudományos Diákkörök 2. Konferenciája – 2015

Legjobb tanévem: 2014/2015

VIDA MÁTÉ GERGELY

Mentortanár: KUBATOV ANTALNÉ

Bevezetés

Dolgozatom megírására a matematika versenyekre való felkészülésem során megismert évszámokkal kapcsolatos feladatok inspiráltak. Tapasztalataim szerint matematika versenyeken előszeretettel tűznek ki olyan példát, melyben az adott tanév évszáma szerepel. Ezek a feladatok általában érdekes ötleteket igényelnek, így kutatásom célja az ilyen típusú feladatok aktualizálása volt. Az általam összeállított feladatsorban többnyire korábbi Arany Dániel Matematikaversenyen, valamint Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen kitűzött feladatok szerepelnek, de a gyűjtemény tartalmaz pár egyszerűbb, mindenki által könnyen észrevehető ötletet igénylő feladatot is.

Feladatok

1. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek bármely két szomszédos jegye különböző és a számjegyek összege 2015?

Megoldás.
Bármely két szomszédos számjegy összegének a lehető legnagyobbnak kell lennie, hogy a szám a lehető legkevesebb számjegyből álljon.

Ez az összeg – mivel két szomszédos számjegy különböző – 9 + 8 = 17.
2015 = 17 · 118 + 9, ezért a kérdezett legkisebb szám legalább 2 · 118 + 1 = 237 jegyű.

Ezért a kérdezett legkisebb számban 118-szor szerepel a 89, illetve egyszer a 9. Mivel bármely két szomszédos számjegye különböző, a keresett szám: 989898989….89

2. Egy 2015×2015 méretű táblázat minden mezőjébe az 1-től 2015-ig terjedő egész számok valamelyikét írtuk be úgy, hogy semelyik sorba nem kerültek egyenlő számok, és a táblázat szimmetrikus lett az egyik átlójára. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ebben az átlóban sem fordulnak elő egyenlő számok.

Megoldás. A feltételekből következik, hogy minden számot minden sorban pontosan egyszer, így összesen 2015-ször írtunk le.

A táblázat szimmetriájából következik, hogy a szóban forgó átlón kívül eső mezőkben együttvéve minden szám páros sokszor fordul elő.

Így ebben az átlóban a 2015 szám mindegyike páratlan sokszor, tehát legalább egyszer szerepel.

Mivel 2013 mező van az átlóban, egyikük sem fordulhat elő egynél többször. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

3. Végződhet-e egy négyzetszám 2015-re?

Megoldás:
Ha n^2 2015-re végződik, akkor $n^2 - 2015$ négy darab 0-ra, tehát $n^2 - 2015$ osztható lesz 10000-rel.

Mivel $10000 = 16 \cdot 625$, így $n^2 - 2015$ osztható kell, hogy legyen 16-tal, tehát n^2 és a 2015 azonos maradékot ad 16-tal osztva.

A 2015 16-os maradéka 15, ellenben a négyzetszámok 16-os maradékai csak 0, 1, 4, 9 lehetnek.

Ha ugyanis

$$n = 16q + r, 0 \leq r \leq 16,$$

akkor

$$n^2 = (16q + r)^2 = 256k^2 + 32k + r^2$$

miatt csak az r^2 16-os maradékait kell végignéznünk.

Tehát nincs 2015-re végződő négyzetszám.

4. Tekintsük az alábbi szorzatot: 1! 2! 3! 4!....2016! Mutassuk meg, hogy elhagyható egy tényező úgy, hogy a megmaradók szorzata négyzetszám lesz!

Megoldás.

Vegyük észre a következőt: $k! \cdot (k+1)! = k! \cdot k! \cdot (k+1)$

Ezt alkalmazva szorzatunk a következő alakban írható:

$$\begin{aligned} 1! \cdot 1! \cdot 2 \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4 \cdot 5! \cdot 5! \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2015! \cdot 2015! \cdot 2016 \\ &= (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot 2015!)^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2016 \\ &= (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot 2015!)^2 \cdot 2^{1008} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1008 \\ &= (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot 2015! \cdot 2^{504})^2 \cdot 1008! \end{aligned}$$

Ha a szorzatból elhagyjuk az 1008! tényezőt, akkor a megmaradt tényezők szorzata valóban négyzetszám lesz.

5. Tekintsük az 1,2,3,…,2014,2015 számsorozatot. Egy lépés során két -x és y- tag helyett az $x + y - 1$ számot helyettesítjük. Melyik számot kapjuk a 2014. lépés után?

Megoldás.

$$(x; y) \rightarrow x + y - 1$$

Vegyük észre, hogy a lépés során eggyel csökken a táblán szereplő számok száma is, és a táblán szereplő számok összege is. Azaz a lépés során e két szám különbsége nem változik meg.

Kezdetben: $(1 + 2 + 3 + \ldots + 2014 + 2015) - 2015 = \frac{2014 \cdot 2015}{2} = 2015 \cdot 1007 = 2029105$, így az utoljára megmaradt szám a 2029105.

6. Adottak az 1,2,3,…2015 számok. Kiválasztunk közülük két y és x számot, és a

$z = \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}}$ számmal helyettesítjük. Igazoljuk, hogy akármilyen (x;y) párt választunk, a 2011. lépés után mindig ugyanazt a számot kapjuk. Melyik ez a szám?

Megoldás

$$x; y \to Z = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}}$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{Z}+1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}+1=\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right)$, azaz ha tekintjük a táblán szereplő számok helyett a reciprokaik1-gyel növelt értékét, akkor ezek szorzata a lépés során nem változik meg.

Kezdetben: $\left(\frac{1}{1}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2015}+1\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2016}{2015}=2016.$

Így az utoljára maradt *A* számra: $\frac{1}{A}+1=2015$, melyből $A=\frac{1}{2015}$.

7. Hány megoldása van az $x_1+x_2+x_3+x_4=2015$ egyenletnek a pozitív egész számok halmazán, ha tudjuk, hogy $x_1>5$, $x_2>6$, $x_3>7$ és $x_4>10$?

Megoldás:

Rendezzük át a kikötést:

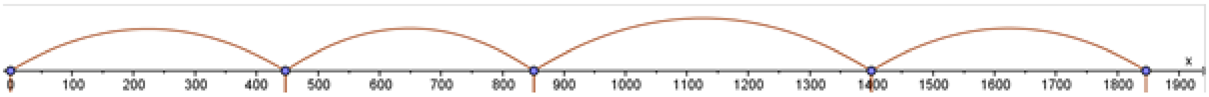
$$x_1-5>0, \qquad x_2-6>0, \qquad x_3-7>0 \text{ és } x_4-10>0$$

Hozzunk be új ismeretleneket:

$$y_1=x_1-5, \qquad y_2=x_2-6, \qquad y_3=x_3-7 \text{ és } y_4=x_4-10$$

Így az egyenlet:

$$y_1+y_2+y_3+y_4=1987$$



Ha a számegyenesen 1-tól 1986-ig kijelölünk 3 számot, az négy szakaszt határoz meg, melyek hosszának összege 1987.

Így az egyenletnek $\binom{1986}{3}$ megoldása van, hiszen 1986 számból ennyiféleképpen lehet kiválasztani 3 számot.

8. Hány megoldása van a következő egyenletnek?

$$2015 = \frac{\{x\}[x]}{x}$$

$[x]$ az x valós szám egészrésze, az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb.
$\{x\}$ az x valós szám törtrésze, értéke $\{x\} = x - [x]$.

Megoldás.
Ha x egész, akkor a tört számlálójában $\{x\} = 0$ tehát maga a tört is 0, így egész megoldás nem lehet.

Ha $x > 0$ akkor $\{x\}[x] \le [x] \le x$, így a jobb oldal nem lehet 1-nél nagyobb.

A tört nevezője 0 nem lehet, ezért $x \neq 0$, a továbbiakban tehát $x < 0$.

Ha $x < -1$, akkor $2x < x - 1$ és így

$$\frac{x-1}{x} < 2$$

Ebből adódik, hogy $x < -1$ esetén nem lesz megoldás, hiszen figyelembe véve, hogy x és $[x]$ is negatív

$$\frac{\{x\}[x]}{x} < \frac{[x]}{x} < \frac{x-1}{x} < 2$$

Amennyiben $-1 < x < 0$, akkor $[x] = -1$ és $\{x\} = x - [x] = 1 + x$. A kitűzött egyenlet így alakul:

$$2015 = \frac{-(1+x)}{x}, \text{ amiből} x = -\frac{1}{2016}$$

Bizonyítottuk, hogy más megoldás nem lehet, az egyetlen lehetséges gyököt az egyenletbe behelyettesítve valóban jó megoldást kapunk.

9. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{2015 + \sqrt{2014 + \sqrt{2013 + \sqrt{\ldots. + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}} < 46$$

Megoldás:

Legyen $P(n) = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \sqrt{(n-2) + \sqrt{\ldots. + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}}$.

Induktív úton igazoljuk: ha n < 2070, akkor $P(n)$ értékét felülről becsüljük, ha az 1 helyett 46^2-t, az összes többi szám helyett 2070-et írunk.

Kezdő lépésként ellenőrizzük az állítást $n = 1,2,3$-ra:

$$P(1) = \sqrt{1} < \sqrt{46^2} = 46$$

$$P(2) = \sqrt{2 + \sqrt{1}} < \sqrt{2070 + \sqrt{46^2}} = \sqrt{2116} = 46$$

$$P(2) = \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}} < \sqrt{2070 + \sqrt{2070 + \sqrt{46^2}}} = 46$$

Az indukciós lépésben feltesszük, hogy $P(k) < 46$, ahol $k < 2069$, és ennek segítségével megmutatjuk, hogy $P(k+1) < 46$.

$$P(n) = \sqrt{(k+1) + \sqrt{k + \sqrt{(k-1) + \sqrt{\dots . + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}} = \sqrt{(k+1) + P(k)} < \sqrt{2070 + 46}$$
$$= 46$$

Mivel $2015 < 2070$ így indukciós bizonyításunk a feladatban kitűzött egyenlőtlenségre érvényes.

10. . Vannak-e olyan $x_1, x_2, x_3, \dots x_{2015}$ különböző pozitív egészek, amelyekre az $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{2015}} = 1$ egyenletnek van megoldása?

Megoldás.

Tekintsük az $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1$ egyenletet.

Ha $n = 1$, akkor $x = 1$ megoldás, mert $\frac{1}{1} = 1$

Ha $n = 2$, akkor x_1 és x_2 egyike sem lehet 1, mert akkor a másodiknak 0-nak kéne lennie. Ha $x_1 \geq 2$, akkor $\frac{1}{x_1} \leq \frac{1}{2}$, hasonlóan $\frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{2}$, de $x_1 \neq x_2$ miatt $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Tehát $n = 2$ nem felel meg.

Ha $n = 3$, akkor $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

Sejtés: ha $n > 2$, akkor a feladatnak van megoldása. Ezt bizonyítsuk teljes indukcióval.

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra ($k \geq 3$) igaz, azaz $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} = 1$. Legyen ekkor $x_1' = 2$, $x_2' = 2x_1 \quad x_3' = 2x_2, \dots x_{k+1}' = 2x_k$, valamint $x_1 > 1$ miatt $x_i' \in Z^+$.

Ekkor az egyenlet $k + 1$-re: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{k+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k}\right)}_{=1} = 1$

Tehát ha $n > 2$, akkor a feladatnak van megoldása, így $n = 2015$-re is.

11. Vannak-e olyan $x_1, x_2, x_3, \dots x_{2015}$ különböző pozitív egészek, amelyekre az $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{2015}}+\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_{2015}}=1$ egyenletnek van megoldása?

Megoldás.

Tekintsük az $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}=1$ egyenletet.

Ha $n=1$, akkor $x=2$ megoldás, mert $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.
Ha $n=2$, akkor $x_1=2$ és $x_2=3$ megoldás, mert $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$
Ha $n=3$, akkor $x_1=2$ és $x_2=3$ és $x_3=7$ megoldás, mert $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=1$

Tegyük fel, hogy az egyenlet $n=k$-ra igaz, azaz $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}+\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k}=1$.
Legyen ekkor $x_{k+1}=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k+1$.

Ekkor az egyenlet $k+1$-re:

$$\underbrace{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}}_{\text{Feltevés szerint: } 1-\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k}}+\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k+1}+\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k\cdot(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k+1)}=1$$

$$1-\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k}+\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k+1}+\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k\cdot(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k+1)}=1$$

$$-\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k}+\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k+1}+\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k\cdot(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k+1)}=0$$

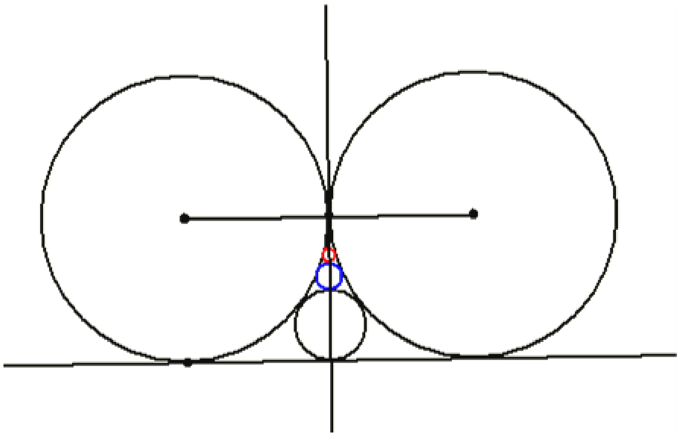
$$\frac{-(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k+1)+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k+1}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k\cdot(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_k+1)}=0$$

$$0=0,$$

Tehát az egyenletnek bármilyen $n\in Z^{+}$ számra van megoldása, így $n=2015$-re is.

12. . Tekintsünk a síkon két egymást érintő – egység sugarú kört, és húzzuk meg ez egyik közös érintőjüket. Ezután írjunk a két kör és az egyenes által határolt részbe kört úgy, hogy érintse a két kört és az egyenest is. Mekkora ennek a beírt körnek a sugara? Folytassuk a körök „beírását” oly módon, hogy az újonnan beírt kör érintse az eredeti két kört, valamint az utoljára beírt kört. Mekkora az ily módon beírt első 2015 kör átmérőjének összege?

Megoldás.



Pitagorasz-tétellel számoljuk ki a körök sugarait és átmérőit:

$(1 - r_1)^2 + 1^2 = (1 + r_1)^2$

$r_1 = \frac{1}{4}$, így $d_1 = \frac{1}{2}$

$[1 - (d_1 + r_2)]^2 + 1^2 = (1 + r_2)^2$

$\left(\frac{1}{2} - r_2\right)^2 + 1^2 = (1 + r_2)^2$

$r_2 = \frac{1}{12}$, így $d_2 = \frac{1}{6}$

$[1 - (d_1 + d_2 + r_3)]^2 + 1^2 = (1 + r_2)^2$

$\left(\frac{1}{3} - r_2\right)^2 + 1^2 = (1 + r_2)^2$

$r_3 = \frac{1}{24}$, így $d_2 = \frac{1}{12}$

Sejtés: $d_n = \frac{1}{n(n+1)}$

A sejtést igazoljuk teljes indukcióval.

Tegyük fel, hogy $n = k$-ig igaz, azaz $d_k = \frac{1}{k(k+1)}$

$$n = (k+1)\text{-re: } \left[1 - \left(\underbrace{d_1 + \cdots + d_k}_{\text{a feltétel miatt } \frac{1}{k(k+1)}} + r_{k+1}\right)\right]^2 + 1^2 = (1 + r_{k+1})^2$$

Ebből kapjuk, hogy

$$r_{k+1} = \frac{1}{2(k+1)(k+2)} \text{ és így } d_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

Így bizonyítottuk, hogy $d_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

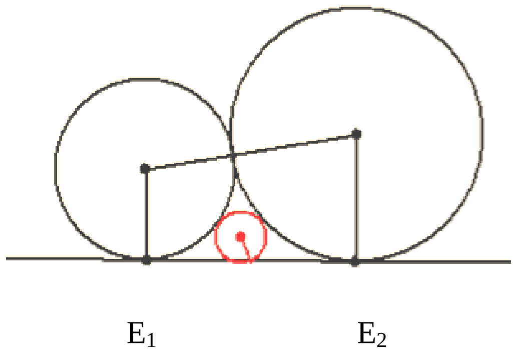
Az átmérők összege tehát:

$$d_1 + \ldots + d_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{k}{k+1}$$

Így $\sum_{i=1}^{2015} d_i = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2015\cdot 2016} = \frac{2015}{2016}$.

13. Tekintsünk a síkon két – egymást érintő – egység sugarú kört, és húzzuk meg az egyik közös érintőjüket. Ez után írjunk a két kör és az egyenes által határolt részbe kört úgy, hogy érintse a két kört és az egyenest is. Folytassuk az eljárást úgy, hogy az újonnan beírt kör mindig érintse az egyenest, az utoljára beírt kört, és még egy kört. Mekkora az 1999. kör sugara?

Megoldás:



Használjuk fel, hogy a közös külső érintőnek az érintési pontok közé eső szakasza:

$$\overline{E_1E_2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{R \cdot r}$$

Így a beírt kör sugara:

$$2\sqrt{rx} + 2\sqrt{Rx} = 2\sqrt{Rr}$$

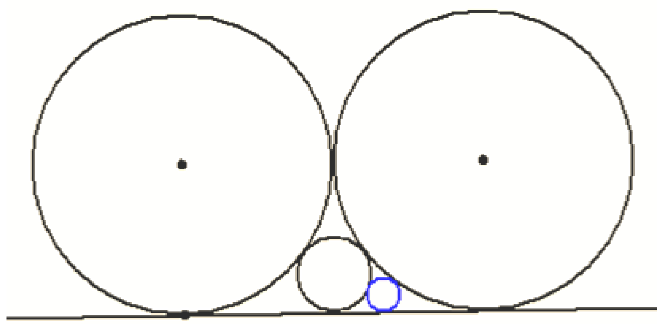
$$x = \frac{R \cdot r}{\left(\sqrt{R} + \sqrt{r}\right)^2}$$

Így ki tudjuk számolni a körök sugarait:

$$r_1 = \frac{1}{4}$$

$$r_2 = \frac{r_1}{\left(\sqrt{r_1} + 1\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{1}{9}$$

$$r_3 = \frac{\frac{1}{9}}{\left(\sqrt{\frac{1}{9}} + 1\right)^2} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{16}{9}} = \frac{1}{16}$$



Sejtés: $r_k = \frac{1}{(k+1)^2}$

A sejtést igazoljuk teljes indukcióval:

$$r_{k+1} = \frac{r_k \cdot 1}{\left(\sqrt{r_k}+1\right)^2} = \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\left(\frac{1}{k+1}+1\right)^2} = \frac{1}{(k+2)^2}$$

Így $r_{2015} = \frac{1}{2016^2}$.

14. 15. Mennyi az alábbi összegek pontos értéke?

a) $1!\cdot 3 - 2!\cdot 4 + 3!\cdot 5 - 4!\cdot 6 + 5!\cdot 7 - 6!\cdot 8 + \cdots - 2014!\cdot 2016 + 2015$

b) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2013\cdot 2014\cdot 2015}$

c) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + 4\cdot 4! + \cdots + 2015\cdot 2015!$

d) $\frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{2+2^2} + \frac{1}{3+3^2} + \cdots \frac{1}{2015+2015^2}$

Megoldás.

Mindegyik feladatnál először az összeg egy általános tagját fogjuk vizsgálni.

a) Tekintsük az összeg egy általános tagját:

$$k!\cdot(k+2) = k!\cdot\big((k+1)+1\big) = (k+1)\cdot k! + k!$$

Így az összeg a következő alakban írható:

$(2!+1!) - (3!-2!) + (4!+3!) - (5!+4!) + \cdots - (2015!+2014!) + 2015!$=1

b) Tekintsük az összeg egy általános tagját:

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{k\cdot(k+1)} - \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}\right]$$

Így az összeg a következő alakban írható:

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} - \cdots + \frac{1}{2013\cdot 2014} - \frac{1}{2014\cdot 2015}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2014\cdot 2015}\right]$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\cdot 2014\cdot 2015} =$$

c) Általános tag:

$$k\cdot k! = (k+1-1)!\cdot k! = (k+1)\cdot k! - k! = (k+1)! - k!$$

Így az összeg:

$$(2!-1!) + (3!-2!) + (4!-3!) + \cdots + (2016!-2015!) = 2016! - 1$$

d) Általános tag:

$$\frac{1}{k+k^2}=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

Így az összeg:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\right)=1-\frac{1}{2016}=\frac{2015}{2016}$$

15. Adott a következő polinom:

$$P(x)=x^2+(x+2)^2+(x+4)^2+...+(x+2014)^2-(x+1)^2-(x+3)^2-...-(x+2015)^2$$

Mely valós x értékek esetén teljesül, hogy $P(x)\geq 0$?

Megoldás.
Rendezzük a *P(x)* polinomban szereplő négyzetes tagokat párokba:

$$P(x)=(x^2-(x+1)^2)+((x+2)^2-(x+3)^2)+\ ...+((x+2014)^2-(x+2015)^2)$$

Használjuk a két négyzet különbségére vonatkozó nevezetes azonosságot, így az összeg egy általános tagja így alakul:

$$((x+2i)^2-(x+2i+1)^2)=(x+2i-x-2i-1)(x+2i+x+2i+1)$$
$$=-1\cdot(2x+4i+1)$$

Ennek segítségével $P(x)$ a következő alakra hozható:

$$P(x)=-1008\cdot 2x-(1+5+9+13+\ldots+4029)=-1008\cdot(2x+2015)$$

Most választ adunk a feladatban feltett kérdésre:

$$-1008\cdot(2x+2015)>0 \text{ ha } x<-\tfrac{2015}{2}$$

16. Mennyi az $f(x)=x^{2014}+2x^{2013}+3x^{2012}+\ldots+2013x^2+2014x+2015$ függvény legkisebb értéke?

Megoldás.
A páratlan együtthatójú tagokat bontsuk két részre az alábbi módon:

$$(2n+1)x^k=nx^k+(n+1)x^k.$$

Ezzel a függvény az

$$f(x)=x^{2014}+2x^{2013}+(x^{2012}+2x^{2012})+4x^{2011}+(2x^{2010}+3x^{2010})$$
$$+\ ....+(1006x^2+1007x^2)+2014x+(1007+1008)$$

alakra hozható.

Alakítsuk át a kifejezést: az egymást követő tagokat csoportosítsuk hármasával, majd az egyes csoportokból emeljünk ki.

$$f(x)=(x^{2014}+2x^{2013}+x^{2012})+2(x^{2012}+x^{2011}+x^{2010})+\ ....+1007(x^2+2x+1)$$
$$+1008$$

A zárójelekben levő kifejezések mind egyenlők egy-egy kéttagú összeg négyzetével, vagyis

$$f(x) = (x^{1007} + x^{1006})^2 + 2(x^{1006} + x^{1005})^2 + \ .... +1007(x+1)^2 + 1008$$

Mivel egy valós szám négyzete nem negatív, a zárójeles tagok legkisebb értéke 0.

Az, $x^k + x^{k-1} = 0$, $k \geq 2$ egyenletből $x = 0$, vagy (az egyenlet x^{k-1}-nel való osztása után) $x = -1$, következik, de az utolsó négyzetes tag ezek közül csak $x = -1$ esetén lesz 0. Ezeken a tagokon kívül változó nem szerepel a kifejezésben, ami módosítaná a minimumhelyet, így a függvény legkisebb értéke $f(-1) = 1008$.

Irodalomjegyzék:

-Versenyfeladatok (OKTV, Arany Dániel Matematikaverseny, Megyei Matematikaverseny)
-Kubatov Antal: Oszthatóság, teljes indukció